# E S S E C

**Option technologique**

## MATHEMATIQUES

*Vendredi 13 mai 1994 de 14h à 18h*

*Les calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables et alphanumériques, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de format maximum 21cm de long x 15cm de large sont autorisées.*

## Exercice 1: Analyse.

Dans cet exercice, on pose pour tout entier naturel n et tout réel x:

$$f_n(x) = x^n \exp(-\frac{x^2}{2}).$$

On pose alors pour tout nombre réel positif $\lambda$:

$$F_n(\lambda) = \int_0^\lambda f_n(t)dt.$$

On note enfin $L_n$ la limite de $F_n(\lambda)$ lorsque $\lambda$ tend vers $+\infty$, si elle existe.

1°) Etudier $f_0$, construire son tableau de variation, et représenter la courbe représentative de $f_0$ dans un repère orthonormé (unité : 4cm).

2°) Exprimer la densité de la loi normale centrée réduite N(0, 1) à l'aide de $f_0$, puis en déduire la valeur de $L_0$.

3°) Etudier $f_1$, construire son tableau de variation, et représenter la courbe représentative de $f_1$ sur la figure précédente.

4°) Déterminer la valeur de $F_1(\lambda)$ à l'aide d'une intégration, puis en déduire $L_1$.

5°) Etudier $f_2$, construire son tableau de variation, et représenter la courbe représentative de $f_2$ sur la figure précédente.

6°) Exprimer $F_0(\lambda)$ en fonction de $F_2(\lambda)$ à l'aide d'une intégration par parties, puis en déduire $L_0$ en fonction de $L_2$ et enfin la valeur de $L_2$.

7°) Pour $n \geq 2$, exprimer $F_{n-2}(\lambda)$ en fonction de $F_n(\lambda)$ à l'aide d'une intégration par parties, puis en déduire $L_{n-2}$ en fonction de $L_n$
En déduire $L_3$, $L_4$, et de façon générale $L_{2p-1}$ et $L_{2p}$ pour tout entier $p \geq 1$.

## Exercice 2: Probabilités.

Des pièces fabriquées dans une usine peuvent présenter deux types de défaut, notés A et B. Des études statistiques ont montré que:
- 8% des pièces présentent le défaut A.
- parmi les pièces atteintes du défaut A, 15% présentent le défaut B.
- parmi les pièces non atteintes du défaut A, 5% présentent le défaut B.

1°) On choisit au hasard une pièce produite. Déterminer les probabilités des événements suivants:
a) La pièce présente les défauts A et B.
b) La pièce présente le défaut B mais pas le défaut A.
c) En déduire la probabilité pour qu'une pièce choisie au hasard présente le défaut B.

2°) Montrer que la probabilité pour que la pièce ne présente ni le défaut A ni le défaut B est égale à 0,874.

3°) On prélève au hasard et avec remise 12 pièces produites. Déterminer la probabilité pour qu'au moins 11 d'entre elles ne présentent ni le défaut A ni le défaut B, et donner une valeur approchée à $10^{-3}$ près de cette probabilité.

***

## Exercice 3: Algèbre linéaire.

1°) On considère les suites réelles $(u_n)_{n\geq 1}$ vérifiant pour tout entier $n \geq 1$ la relation:

(1) $\quad 9u_{n+3} - 9u_{n+2} - 7u_{n+1} + 7u_n = 0.$

a) Résoudre l'équation $9x^3 - 9x^2 - 7x + 7 = 0$.
b) Déterminer les suites géométriques non nulles $(r^n)_{n\geq 1}$ vérifiant (1).
c) On considère une suite $(u_n)_{n\geq 1}$ vérifiant (1).
- Exprimer en fonction de $u_1$, $u_2$, $u_3$ trois nombres réels $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ tels que:

$$\begin{cases} u_1 = \alpha + \frac{\sqrt{7}}{3}\beta - \frac{\sqrt{7}}{3}\gamma. \\ u_2 = \alpha + \frac{7}{9}\beta + \frac{7}{9}\gamma. \\ u_3 = \alpha + \frac{7\sqrt{7}}{27}\beta - \frac{7\sqrt{7}}{27}\gamma. \end{cases}$$

*(On formera $9u_3 - 7u_1$. On donnera les expressions exactes de $\alpha$, $\beta$, $\gamma$).*

- On associe à la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ définie par:

$$v_n = u_n - \alpha - \beta(\frac{\sqrt{7}}{3})^n - \gamma(-\frac{\sqrt{7}}{3})^n.$$

Etablir qu'elle vérifie (1), puis, en remarquant que $v_1 = v_2 = v_3 = 0$, montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $v_n = 0$. Exprimer enfin $u_n$ en fonction de n.

d) En déduire que l'ensemble des suites $(u_n)_{n\geq 1}$ vérifiant (1) est l'ensemble des combinaisons linéaires des trois suites obtenues au (b).

2°) On se propose d'étudier la suite $(M^n)_{n\geq 1}$ des puissances de la matrice:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

a) Calculer $M^2$, $M^3$, $M^4$ et en déduire que M vérifie les deux propriétés suivantes:

(2) $9M^4 - 9M^3 - 7M^2 + 7M = 0$.

(3) Les matrices M, $M^2$, $M^3$ sont linéairement indépendantes.

b) On se propose d'établir, pour tout entier naturel $n \geq 1$, l'existence et l'unicité de trois nombres réels $a_n$, $b_n$, $c_n$ tels que:

(4) $M^n = a_nM + b_nM^2 + c_nM^3$.

- Etablir, pour tout entier $n \geq 1$, l'unicité des réels $a_n$, $b_n$, $c_n$ (s'ils existent).
- Déterminer $a_n$, $b_n$, $c_n$ pour $n = 1, 2, 3, 4$.
- Etablir par récurrence l'existence de $a_n$, $b_n$, $c_n$ dans le cas général.

*(On explicitera $a_{n+1}$, $b_{n+1}$, $c_{n+1}$ en fonction de $a_n$, $b_n$, $c_n$).*

c) Vérifier par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$: $a_n + b_n + c_n = 1$.

d) En multipliant par $M^{n-1}$ la relation (2), établir que les suites $(a_n)$, $(b_n)$, $(c_n)$ vérifient la relation (1).

e) En appliquant à la suite $(b_n)$ les résultats obtenus à la question 1°, établir pour tout entier $n \geq 1$ la formule suivante:

$$b_n = \frac{9}{14}\left[\left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^n + \left(-\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^n\right].$$

Déterminer de même les expressions de $a_n$ et $c_n$.

***